МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НЕФТЕЮГАНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
(филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Югорский государственный университет»
(НИК (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ»)

Методические указания по выполнению практических работ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования

(по отраслям)

2019г.

ОДОБРЕНЫ
Предметной (цикловой)
комиссией МиЕНД
Протокол №_1_ от 12.09 2019г.
Председатель ПЦК
______________ В.В. Шумскис

УТВЕРЖДЕНЫ
заседанием методсовета
Протокол №_1_ от 17.09 2019г.
Председатель методсовета
______________ Н.И. Савватеева

Методические указания по выполнению практических работ разработаны в соответствии рабочей программой ЕН.01 МАТЕМАТИКА по специальности 15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям).

Разработчик:

______________	И.К. Аюпова	преподаватель
(подпись)	(инициалы, фамилия)	(занимаемая должность)

СОДЕРЖАНИЕ **Стр.**

1. Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 МАТЕМАТИКА разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины и предназначены для приобретения необходимых практических навыков и закрепления теоретических знаний, полученных обучающимися при изучении учебной дисциплины, обобщения и систематизации знаний перед дифференцированным зачетом.

Методические указания предназначены для обучающихся специальности 15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования (по отраслям).

Учебная дисциплина ЕН.01 МАТЕМАТИКА относится к математическому и общему естественнонаучному циклу, изучается на 2 курсе и при ее изучении отводится значительное место выполнению практических работ.

Целью методических указаний является:

- организация самостоятельной работы обучающихся на практических занятиях;
- закрепление и углубление теоретических знаний;
- приобретение навыков работы с литературными источниками.

В методических указаниях представлен перечень практических работ с указанием номера темы, по которой данная работа выполняется и количество часов, отведенных на выполнение каждой работы.

Практические работы проводятся в соответствии с календарно-тематическим планированием по данной учебной дисциплине и выполняются во время практических занятий.

Практические работы проводятся обучающимися индивидуально в письменном виде.

Практические работы, невыполненные по причине пропусков занятий, выполняются обучающимся самостоятельно и сдаются на проверку преподавателю в установленные преподавателем сроки.

Результаты выполнения практических заданий выставляются преподавателем в журнал учебных занятий.

В дальнейшем, при изменении Федеральных государственных образовательных стандартов, в методические указания могут вноситься изменения.

Цель и планируемые результаты освоения учебной дисциплины:

Код	***Умения***	***Знания***
ОК 2 ОК 3 ОК4 ПК 1.1 ПК 1.3 ПК 1.5 ПК 2.2 ПК 2.4 ПК 3.4	Анализировать сложные функции и строить их графики; Выполнять действия над комплексными числами; Вычислять значения геометрических величин; Производить операции над матрицами и определителями; Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;	Основные математические методы решения прикладных задач; Основные понятия и методы математического анализа, основные понятия линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; Основы интегрального и дифференциального исчисления; Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и сфере профессиональной деятельности.

	Решать системы линейных уравнений различными методами;	

Выполнение практических работа направлены на формирование **общих компетенций:**
ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ПК 1.1. Руководить работами, связанными с применением грузоподъемных механизмов, при монтаже
и ремонте промышленного оборудования.
ПК 1.3. Участвовать в пусконаладочных работах и испытаниях промышленного оборудования после ремонта и монтажа.
ПК 1.5. Составлять документацию для проведения работ по монтажу и ремонту промышленного оборудования.
ПК 2.2. Выбирать методы регулировки и наладки промышленного оборудования в зависимости от внешних факторов.
ПК 2.4. Составлять документацию для проведения работ по эксплуатации промышленного оборудования.
ПК 3.4. Участвовать в анализе процесса и результатов работы подразделения, оценке экономической эффективности производственной деятельности.

Рабочая программа учебной дисциплины предусматривает проведение практических работ в объеме 40 часов.

2. Требования по выполнению практических работ

Общие требования к оформлению практических работ:

1) практические работы выполняются в отдельной тетради; должен быть указан вариант, тема практической работы;
2) работа должна быть выполнена аккуратно, четким и разборчивым почерком;
3) все преобразования должны быть выполнены последовательно;
4) при выполнении чертежей должны быть указаны названия осей координат, единичные отрезки;
5) при решении задач сначала запишите формулу, потом вычисления.

Методические указания:

1. Повторить теоретический материал.
2. Разобрать примеры решения, рассмотренные на занятиях.
3. Выполнить задания в отдельной тетради для практических работ с подробными объяснениями.

3. Критерии оценивания

оценка «5», если выполнены все задания, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению, допускается 1 ошибка;
оценка «4», если выполнены все задания, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению, допускается не более 4 ошибок;
оценка «3», если выполнено более половины заданий, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению;
оценка «2», если выполнено менее половины заданий.

4. Перечень практических работ

№	Тема занятия	Тема	Часы
1.	Построение графиков сложных функций.	1.1	2
2.	Вычисление значений производных функций в точке с применением правил дифференцирования.	1.2	2
3.	Применение производной к исследованию функции	1.2	2
4.	Исследование функции с помощью производной, построение их графиков.	1.2	2
5.	Нахождение неопределенного интеграла	1.3	2
6.	Применение определенного интеграла в геометрии	1.3	2
7.	Числовые ряды	1.4	2
8.	Действия над комплексными числами..	1.5	2
9.	Дифференцирование функций численными методами.	1.6	2
10.	Вычисление определенного интеграла по правилам прямоугольников, трапеций.	1.6	2
11.	Вычисление определенного интеграла по правилам Симпсона	1.6	2
12.	Действия над матрицами. Вычисление определителей	2.1	2
13.	Решение систем линейных уравнений матричным методом.	2.2	2

14.	Решение систем линейных уравнений методом Крамера.	2.2	2
15.	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	2.2	2
16.	Решение систем линейных уравнений различными способами.	2.2	2
17.	Решение задач на вычисление вероятностей событий.	3.1	2
18.	Решение задач на вычисление вероятностей событий с помощью теорем сложения и умножения.	3.1	2
19.	Нахождение числовых характеристик случайных величин	4.1	2
20.	Числовые характеристики выборки. Геометрическая интерпретация выборки	4.2	2

Практическая работа №1.
Построение графиков сложных функций.

Цели: выявить способы построения графиков сложных функций.

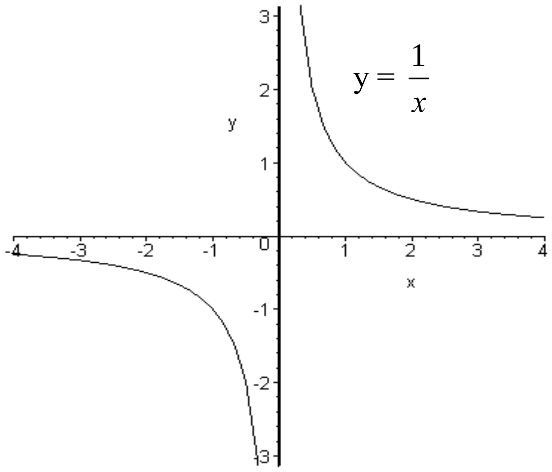
Методические указания

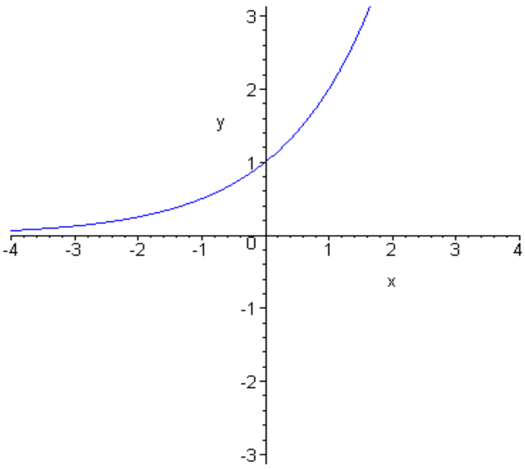
Пример: Построить график функции y = $2^{\frac{1}{x}}$

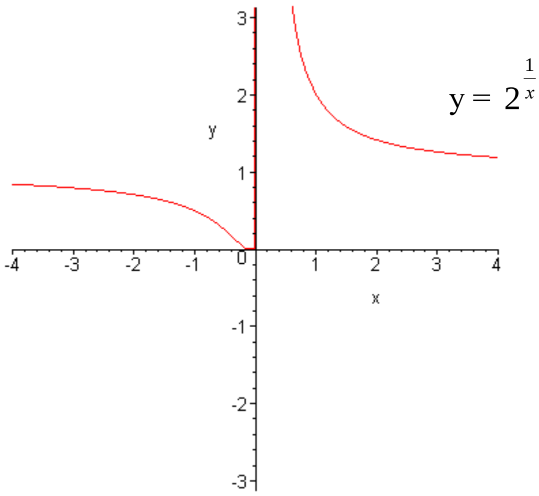
Решение. Построим графики функции y = $\frac{1}{x}$ и f(v)= 2^{v}

Выделяем промежутки монотонности функции y = $\frac{1}{x}$: (- ∞;0) и (0; + ∞). При возрастании x на промежутке (- ∞ ;0) v(x) убывает от 0 до - ∞. Такому изменению v соответствует убывание y от 1 до 0. Если x возрастает от 0 до + ∞, то v(x) убывает от +∞ до 1.

Для более точного построения графика следует использовать контрольные точки, выбирая те значения аргумента x, при которых легко вычислять значения y(x).







Таким образом, построение графика сложной функции y=f(v(x)) в некоторых случаях можно выполнить по следующему алгоритму:

1. Начертить графики внутренней и внешней функций.
2. Определить промежутки монотонности внутренней функции y=v(x) и отметить их на оси Ox плоскости xOy.
3. На каждом промежутке определить границы изменения v=v(x) и выбрать те значения, которые попадают в область определения функции y=f(v).

4. По графику внешней функции y = f(v) найти характер изменения функции y.
5. В системе координат xOy начертить график y = y(x).

Вариант1

1.Построить график функции: $y = 3^{x+2} + 1$

2.Построить график функции: $y = (x-2)^{-2} + 1$

3.Построить график функции: $y = 3\cos x + 1$

Вариант2

1.Построить график функции $y = 2^{ч-1}$

2.Построить график функции: $y = x^{\frac{1}{2}} + 1$

3.Построить график функции: $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Вариант3

1.Построить график функции: $\mathrm{y} = \log_3(\mathrm{x} + 3) + 2$

2.Построить график функции: $y = (\frac{1}{2})^{x+2} - 1$

3.Построить график функции: $y = tg(x - \frac{\pi}{3})$

Вариант4

1.Построить график функции: $y = 4^{x-3} + 1$

2.Построить график функции: $y = \log_{\frac{1}{4}}\left(x-2\right) - 1$

3.Построить график функции: $y = 2\sin 3x - 1$

Вариант5

1.Построить график функции: $y = tg(x - \frac{\pi}{3})$

2.Построить график функции: $y = (\frac{1}{3})^{x} + 3$

3.Построить график функции: $y = (x-2)^{-3} + 1$

Вариант6

1.Построить график функции $y = 2^{ч-1} + 3$

2.Построить график функции: $y = 3\cos x - 1$

3.Построить график функции: $y = 3^{x-2} + 1$

Практическая работа №2.
Вычисление значений производных функций в точке с применением правил дифференцирования.

Цели: отработать навыки и умения вычислять производные в точке.

Методические указания

Пример. Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x$ в точке $x_0 = 5$

Решение: Сначала находим производную: $f'(x) = (x^3 + 3x)' = 3x^2 + 3$

На втором шаге вычислим значение производной в точке $x_0 = 5$:

$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 3 = 78$

Вариант 1

Найти значение производной функции в точке x_0:

$f(x) = 3x - 1$ в точке $x_0 = 20$

$f(x) = x + 8$ в точке $x_0 = 27$

$f(x) = x^2 + 3$ в точке $x_0 = 32$

$f(x) = \dfrac{2x - 4}{3x^2 - 5x}$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = (x^2 + 3) \cdot (5x - 6x)$ в точке $x_0 = 3$

$f(x) = \dfrac{2x - 4}{3x^2 - 5x} + 6x^2$ в точку $x_0 = -1$

$f(x) = \dfrac{(x - 4x^2) \cdot 5x}{x^2 - 3} + 6x^2$ в точку $x_0 = -2$

Вариант 2

Найти значение производной функции в точке x_0:

$f(x) = 4x^2 - 5$ в точке $x_0 = -18$

$f(x) = x^3 - 5$ в точке $x_0 = 44$

$f(x) = 3x^2 + 2x$ в точке $x_0 = -5$

$f(x) = \dfrac{12x - 4x^3}{3x^2 - x}$ в точку $x_0 = -3$

$f(x) = (2x^2 + 4) \cdot (7x - 6)$в точке $x_0 = -3$

$f(x) = \dfrac{2x + 6}{3x^3 + x} + 9$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = \dfrac{(2x - 5x^2) \cdot 8x}{4x^2 - 1} + 6x^2$ в точку $x_0 = -1$

Вариант 3

Найти значение производной функции в точке x_0:

$f(x) = x^2 + x - 1$ в точке $x_0 = -64$

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ в точке $x_0 = 14$

$f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 97$

$f(x) = \dfrac{5x - 2x^4}{3x^2 + 5}$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = (3x^2 - 6) \cdot (x^4 - 6)$в точке $x_0 = 3$

$f(x) = \dfrac{9x - 5}{x^3 + 7x} + 9x$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = \dfrac{(x - 9x^2) \cdot 8x}{x^2} - 6x$ в точку $x_0 = -1$

Вариант 4

Найти значение производной функции в точке x_0:

$f(x) = 3x^3 + 18$ в точке $x_0 = 48$

$f(x) = \sqrt{x} + 5$ в точке $x_0 = 25$

$f(x) = 37x^3 + 3x - 14$ в точке $x_0 = 17$

$f(x) = \dfrac{5x - x^4}{3 + 5x}$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = (3x^3 + 1) \cdot (3x^4 - 2)$в точке $x_0 = 4$

$f(x) = \dfrac{x - 5}{3x^2 + x} - x$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = \dfrac{(10x - x^2) \cdot 4x}{3x^2} - 6x$ в точку $x_0 = -2$

Вариант 5

Найти значение производной функции в точке x_0:

$f(x) = 4x^4 - 2x + 117$ в точке $x_0 = 26$

$f(x) = 32 + 3x^3 + \dfrac{x}{2} + 11$ в точке $x_0 = 24$

$f(x) = 38 + x^2 + \dfrac{x}{3} - 1{,}5$ в точку $x_0 = 2$

$f(x) = \dfrac{15x}{13 - x}$ в точку $x_0 = -4$

$f(x) = (3x^3 + 1) \cdot (3x^4 - 2)$в точке $x_0 = 4$

$f(x) = \dfrac{3x - 5}{9x^2 - 2x} - 3x^3$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = \dfrac{(3 - x^2) \cdot 4x}{x^2} - 8x$ в точку $x_0 = -1$

Вариант 6

Найти значение производной функции в точке x_0:

$f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = \dfrac{25}{64}$

$f(x) = 6\sqrt{x} + 2x - \dfrac{4}{5}$ в точку $x_0 = 1{,}02$

$f(x) = 2 - 5x^2 + \dfrac{x}{2} + 14$ в точке $x_0 = 1$

$f(x) = \dfrac{15x - 4x^2}{3 - x^3}$ в точку $x_0 = -2$

$f(x) = (x^3 + 6) \cdot (x^4 - 32)$в точке $x_0 = -2$

$f(x) = \dfrac{2x - 55}{9x^2} - 3x^4$ в точку $x_0 = -3$

$f(x) = \dfrac{(33 - x^4) \cdot x}{5x^2} + 13x$ в точку $x_0 = -1$

Практическая работа №3.
Применение производной к исследованию функции.

Цели: закрепление умений применять производную для исследования функций.

Методические указания

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение**:** 1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$f'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) = 0$

Полученное квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$x_1 = 1, x_2 = 3 -$ критические точки

Первая критическая точка принадлежит данному отрезку: $x_1 = 1 \in [-1; 2]$
А вот вторая – нет: $x_2 = 3 \notin [-1; 2]$

Вычислим значение функции в нужной точке:

$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 3 = \mathbf{11}$

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) + 3 = \mathbf{-29}$

$f(-1) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 3 = \mathbf{7}$

3) Выбираем из трех чисел (11,-29,7) наибольшее и наименьшее.

Ответ: max:11, min:-29

Вариант 1 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = -4x^2 + 12x - 7$ на отрезке $[-1;5]$; б) $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке $[-6;0]$; в) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке $[-1;3]$; г) $y = x + \dfrac{2}{3x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.	**Вариант 2** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = -3x^2 - 12x + 3$ на отрезке $[-3;2]$; б) $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке $[-1;2]$; в) $y = 2x^3 - 18x^2 + 30x - 3$ на отрезке $[0;2]$; г) $y = 2x - \dfrac{3}{2x-4}$ на отрезке $[3;+\infty]$.
Вариант 3 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = -5x^2 + 15x - 9$ на отрезке $[-1;5]$; б) $y = x^4 + 2x^2 - 2x - 2$ на отрезке $[-4;0]$; в) $y = x^3 - 6x^2 + 3x - 1$ на отрезке $[-1;2]$; г) $y = 3x + \dfrac{1}{4x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.	**Вариант 4** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = -5x^2 - 12x + 3$ на отрезке $[-3;2]$; б) $y = x^4 - 12x^3 + 10$ на отрезке $[-1;2]$; в) $y = 3x^3 - 127x^2 + 45x - 3$ на отрезке $[0;2]$; г) $y = 2x - \dfrac{3}{5x+4}$ на отрезке $[0;+\infty]$.
Вариант 5 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = -4x^2 + 12x - 7$ на отрезке $[-1;5]$; б) $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке $[-6;0]$; в) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке $[-1;3]$; г) $y = x + \dfrac{2}{3x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.	**Вариант 6** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = -3x^2 - 12x + 3$ на отрезке $[-3;2]$; б) $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке $[-1;2]$; в) $y = 2x^3 - 18x^2 + 30x - 3$ на отрезке $[0;2]$; г) $y = 2x - \dfrac{3}{2x-4}$ на отрезке $[3;+\infty]$.

Практическая работа №4.
Исследование функции с помощью производной, построение их графиков.

Цели: формирование навыков исследования функции на монотонность и экстремумы.

Методические указания

Пример. Построить график функции $y = x^4 - 4x^2$

Решение:

1. Область определения функции служит множество R.
2. f (-x) = $(-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$ –функция четная, значит график функции симметричен относительно оси y.
3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат

$$OX: \begin{cases} y = 0 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2 \end{cases}$$

$$OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Асимптот нет.
5. Находим экстремумы функции:

$y' = 4x^3 - 8x$

Найдем критические точки первого рода:

$4x^3 - 8x = 0$

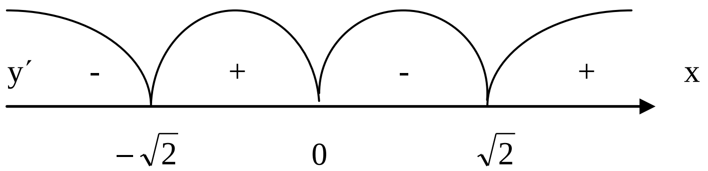
$4x(x^2 - 2) = 0$

$x = 0$ или $x = \pm\sqrt{2}$

Определим знак производной на каждом интервале:

$f'(2) = 4\cdot2^3 - 8\cdot2 \ge 0$, $\qquad f'(1) = 4\cdot1^3 - 8\cdot1 \le 0$

$f'(-1) = 4\cdot(-1^3) - 8\cdot(-1) > 0$, $\qquad f'(-2) = 4\cdot(-2^3) - 8\cdot(-2) < 0$



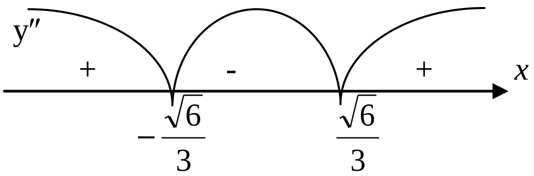
X	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
f ′(x)	–	0	+	0	–	0	+
f (x)	↘	-12	↗	0	↘	-12	↗
Экстр		min		max		min	

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 8(\sqrt{2})^2 = 4 - 16 = -12$; $\qquad f(+2) = -12$; $\qquad f(0) = 0$

6. Находим направления выпуклостей:

$y'' = 12x^2 - 8$, $\quad y'' = 0$,

$12x^2-8=0$, $x^2=\frac{8}{12}$, $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_1=-\frac{\sqrt{6}}{3},\ x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$

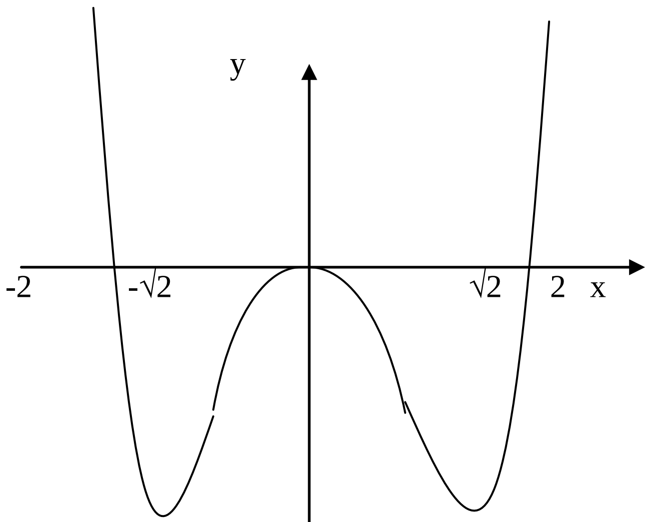


f″(2) =12 • 4 – 8 > 0

f″(0) =12 • 0 – 8 < 0

f″(-2) =12 • 4 – 8 > 0

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^4-4\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{36}{81}-\frac{4\cdot 6}{9}=\frac{-108}{81}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}\ .$$



7. f (3) = $3^4 – 4 • 3^2$ = 81 – 36 = 45
   f (-3) = 45

Вариант 1

Исследовать функцию и схематически построить ее график:

а)^0 $y=2x^4-12x^3+10$, б) $y=\frac{2x-4}{x^2}$

в)^0 $y=2x^4-18x^2-9$, г) $y=\frac{5x^2+10}{4x}$.

Вариант 2

Исследовать функцию и схематически построить ее график:

а)^0 $y=x^5-10x^3+1$, б) $y=\frac{2x-2}{3x+6}$.

в)^0 $y=2x^3-21x^2+17$, г) $y=\frac{2x^2-8}{x}$.

Вариант 3

Исследовать функцию и схематически построить ее график:

а)^0 $y=\frac{1}{5}x^5-12x^3-4$, б) $y=\frac{2x+6}{3x^2}$.

в)^0 $y=\frac{1}{5}x^5-12x^3-4$, г) $y=\frac{2x+6}{3x^2}$.

Вариант 4

Исследовать функцию и схематически построить ее график:

а)^0 $y=2x^4-12x^3+10$, б) $y=\frac{2x-4}{x^2}$

в)^0 $y=2x^4-18x^2-9$, г) $y=\frac{5x^2+10}{4x}$.

Вариант 5

Исследовать функцию и схематически построить ее график:

а)^0 $y=x^5-10x^3+1$, б) $y=\frac{2x-2}{3x+6}$.

в)^0 $y=2x^3-21x^2+17$, г) $y=\frac{2x^2-8}{x}$.

Вариант 6

Исследовать функцию и схематически построить ее график:

а)^0 $y=\frac{1}{5}x^5-12x^3-4$, б) $y=\frac{2x+6}{3x^2}$.

в)^0 $y=\frac{1}{5}x^5-12x^3-4$, г) $y=\frac{2x+6}{3x^2}$.

Практическая работа №5.
Нахождение неопределенного интеграла.

Цели: формирование навыков нахождения неопределенных интегралов непосредственным методом интегрирования; формировать умение находить неопределенные интегралы методом подстановки и интегрированием по частям.

Методические указания

Пример 1. Найти $\int\frac{3x^3-4x+1}{x^2}dx$ *непосредственным интегрированием.*

Решение:

$$\int\frac{3x^3-4x+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{3x^3}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(3x-\frac{4}{x}+x^{-2}\right)dx=\frac{3x^2}{2}-4\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

$$=\frac{3x^2}{2}-4\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

Пример 2. Найти $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}$ *методом замены переменной.*

Решение: произведем подстановку 2-3x²=t, тогда (2-3x²)´dx = dt, -6xdx = dt, а $xdx = -\frac{dt}{6}$.

Произведем замену:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}} = -\int \frac{dt}{6\sqrt{t}} = -\frac{1}{6}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{t} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2} + C$$

Пример 3. Найти $\int (2+cosx)^2 \sin xdx$ *методом интегрирования по частям.*

Решение: произведем подстановку 2+cosx=t, тогда (2+cosx)´dx=dt, -sinxdx=dt, а sinxdx=-dt

$$\int (2+\cos x)^2 \sin xdx = -\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2+\cos x)^3 + C$$

Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$.

Пример 4. Найти $\int x\sin 2xdx$ *методом интегрирования по частям.*

Решение: пусть $u = x, du = dx, dv = \sin 2x, v = \int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Воспользуемся формулой $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int x\sin 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2xdx\right) = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\left(x^3 + 2 - \frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$; 2. $\int (2-x^2)x^4 dx$; 3. $\int \frac{(2x+4)^2}{x}dx$; 4. $\int \frac{4x^5\sqrt{x}dx}{5x\sqrt[4]{x}}$;

5. $\int \frac{(x^2-4)dx}{x-2}$; 6. $\int \sin^6 x\cos xdx$; 7. $\int (2-3x)\sin xdx$; 8. $\int 2xe^{x^2-5}dx$;

9. $\int \frac{\cos xdx}{(\sin x-5)^3}$; 10. $\int \frac{5x}{(x^2-5)^6}dx$.

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\left(\cos 2x - 3tgx - \frac{5}{x}\right)dx$; 2. $\int \frac{(x^2-3x^4+3x^5)dx}{x^2}$; 3. $\int (4x^6+9x^4)x^3 dx$;

4. $\int \frac{(4x^2-9)dx}{2x+3}$; 5. $\int \frac{5dx}{x^2\sqrt{x}}$; 6. $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+5}$; 7. $\int \frac{arctgxdx}{1+x^2}$; 8. $\int 2x\sqrt[3]{x^2+6}dx$;

9. $\int (3x+5)\cos 2xdx$; 10. $\int x^3 \ln 2xdx$.

Вариант 3

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\left(3tg5x - 4x^5 + \frac{4}{x^6}\right)dx$; 2. $\int \frac{(4x^5+5x^3-5x)dx}{x^2}$; 3. $\int \frac{(x^2-3x-4)dx}{x-4}$;

4. $\int x^5\left(2x^3+4x\right)dx$; 5. $\int \frac{5dx}{x\sqrt{x}}$; 6. $\int x^2\left(2x^3+4\right)^5 dx$; 7. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

8. $\int \frac{\cos x dx}{5\sin x+9}$; 9. $\int (5x-3)e^{2x}dx$; 10. $\int \left(x^2-3\right)\ln x dx$.

Вариант 4

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int (e^{3x-5}+tgx)dx$; 2. $\int \frac{(5x^3+2x^3-x)dx}{x^3}$; 3. $\int \frac{\left(x^2-5x+6\right)dx}{x-3}$; 4. $\int \frac{x^3\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt{x}}$;

5. $\int \left(x^3-4x\right)x^5 dx$; 6. $\int \frac{x^{3x}dx}{\left(2x^4+5\right)^6}$; 7. $\int \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 8. $\int x^3\sqrt{x^4+3}dx$;

9. $\int \left(x^3-x\right)\ln 2x dx$; 10. $\int (2x+4)e^x dx$.

Вариант 5

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \left(\sin 3x+\frac{4}{x^2}-e^x\right)dx$; 2. $\int \frac{(x^4-3x^2+4x)dx}{x^3}$; 3. $\int x^3\left(3x^5+4x\right)dx$;

4. $\int \frac{\left(x^2+3x+2\right)dx}{x+2}$; 5. $\int \frac{x\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{x}}$; 6. $\int \frac{3xdx}{\cos^2\left(x^2-5\right)}$; 7. $\int \frac{\cos x dx}{4\sin x+5}$;

8. $\int \frac{2x^2dx}{\sqrt{3x^3+4}}$; 9. $\int (4x-2)e^{3x}dx$; 10. $\int \left(x^4+5x\right)\ln x dx$.

Вариант 6

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \left(3tg5x-4x^5+\frac{4}{x^6}\right)dx$; 2. $\int \frac{\left(4x^5+5x^3-5x\right)dx}{x^2}$; 3. $\int \frac{\left(x^2-3x-4\right)dx}{x-4}$;

4. $\int x^5\left(2x^3+4x\right)dx$; 5. $\int \frac{5dx}{x\sqrt{x}}$; 6. $\int x^2\left(2x^3+4\right)^5 dx$; 7. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

8. $\int \frac{\cos x dx}{5\sin x+9}$; 9. $\int (5x-3)e^{2x}dx$; 10. $\int \left(x^2-3\right)\ln x dx$.

Практическая работа №6.
Применение определенного интеграла в геометрии.

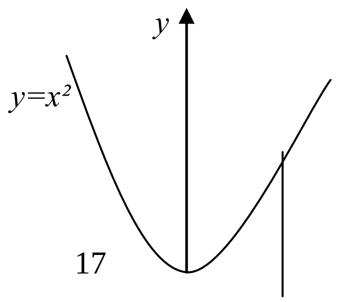
Цели: формирование навыков нахождения площадей и объемов с помощью определенных интегралов.

Методические указания:

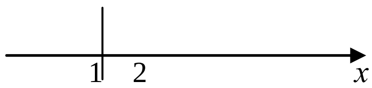
Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение: Построим данную линию $y=x^2$ и прямые $x=1, x=2, y=0$.

x	0	1	2
y	0	1	4



$$S = \int_a^в f(x)dx$$



$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} 2\frac{1}{3} кв.ед$$

Ответ: $S = 2\frac{1}{3} кв.ед$

Вариант 1

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 2^x,\ y = 0,\ x = -2,\ x = 3$; б) $y = 8x - x^2,\ y = 0$; в) $y = x^2 - x - 2,\ y = x + 1$

г) $y = \frac{5}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$; д) $y = x^2 + 4,\ y = 2x + 4$; е) $y = x^2 + 3x - 4,\ y = 0$.

Вариант 2

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 4\cos x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{3}$; б) $y = -\frac{6}{x},\ y = x - 5$; в) $y = x^2 + 5x - 6,\ y = 0$.

г) $y = 3\sin x + 1,\ y = 0, x = \frac{\pi}{4},\ \ x = \frac{\pi}{2}$; д) $y = 2x^2 - 6x,\ y = 0$; е) $y = \frac{5}{x},\ y = -x + 6$.

Вариант 3

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 5^x,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 2$; б) $y = 8x - x^2,\ y = 0$; в) $y = x^2 - x - 6,\ y = x + 2$

г) $y = \frac{5}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$; д) $y = x^2 + 4,\ y = 2x + 4$; е) $y = x^2 + 3x - 4,\ y = 0$.

Вариант 4

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 4\cos x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{3}$; б) $y = -\frac{3}{x},\ y = x - 4$; в) $y = x^2 + 5x + 4,\ y = 0$.

г) $y = \sin x + 1,\ y = 0, x = \frac{\pi}{3},\ \ x = \frac{\pi}{2}$; д) $y = 2x^2 - 10x,\ y = 0$; е) $y = \frac{5}{x},\ y = -x - 6$.

Практическая работа № 7.
Числовые ряды.

Цели: формировать умения исследовать числовые ряды на сходимость.

Методические указания

Пример. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

Решение: Применим первый признак сравнения**:**

Сравним этот ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, общий член которого

$v_n = \frac{1}{2^n}$: имеем $u_n < v_n$, действительно $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$ при всех n ($\boldsymbol{n \epsilon N}$).

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, а значит, сходится и заданный ряд.

Ответ: ряд сходящийся

Вариант 1

1.Вычислить первые четыре члена ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 2n + 5}{2n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^2}$;

2.Исследовать ряд на сходимость, используя признаки сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 - 2n}{n^3 + 4n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{2n-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(5n+2)^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^n}{2^n}$.

Вариант 2

1.Вычислить первые четыре члена ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{3n^3 - 2n + 4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^{n-1}}$;

2.Исследовать ряд на сходимость, используя признаки сходимости:

а); $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 2n + 5}{2n+3}$; в) $\sum \frac{3n^4 - 2n^2 + 3}{2n-1}$; г) $\sum \frac{(3n+2)!}{5^{2n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+5)n}{8^n}$.

Вариант 3

1.Вычислить первые четыре члена ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 2n + 5}{2n+3}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^2}$;

2.Исследовать ряд на сходимость, используя признаки сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 - 2n}{n^3 + 4n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{2n-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(5n+2)^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^n}{2^n}$.

Вариант 4

1.Вычислить первые четыре члена ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 2n + 5}{2n+3}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^2}$;

2.Исследовать ряд на сходимость, используя признаки сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 - 2n}{n^3 + 4n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{2n-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(5n+2)^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^n}{2^n}$.

Вариант 5

1.Вычислить первые четыре члена ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 2n + 5}{2n+3}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^2}$;

2.Исследовать ряд на сходимость, используя признаки сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 - 2n}{n^3 + 4n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{2n-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(5n+2)^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^n}{2^n}$.

Вариант 6

1.Вычислить первые четыре члена ряда:

3. (6-5i)-(2+5i)
4. (9-2i)(7+3i-(5-4i)
5. (1+6i)-(7-6i)(5+i)
4.(4+3i-(2-3i)^2
5.(4-3i)/(5-3i)- (4-i)

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2n+5}{2n+3}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{n^2}$;

2.Исследовать ряд на сходимость, используя признаки сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3-2n}{n^3+4n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{2n-3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(5n+2)^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)^n}{2^n}$.

Практическая работа №8. Действия над комплексными числами.

Цели: формировать умения выполнять арифметические операции с комплексными числами.

Методические указания

Пример: Выполнить действие (5+3i)(6+4i)

Решение: 1) Раскрываем скобки (5+3i)(6+4i) = 30+20i+18i+12i^2;

2) Приводим подобные: 30+38i+12i^2

3) Подставляем вместо $i^2=-1$, 30+38i+12*(-1)=30+38i-12=18+38i.

Вариант 1

Выполнить действие:
1. (6+4i)-(2-5i)
2. (6+2i)(9-2i)-(5+4i)
3. (11+6i)-(7-3i)(5+2i)
4. (6+8i)-(4-3i)^2
5.(4-i)/(5-i)- (4-i)
6.((6-2i)(3+i))/(3-i)

Вариант 2

Выполнить действие:
1. (6-5i)-(2+5i)
2. (9-2i)(7+3i-(5-4i)
3. (9-6i)+(1-8i)(5-5i)
4. (8-4i)+(14-2i)^2
5. (9-2i)/(7-2i)-(5-8i)
6. ((5-2i)(4+i))/(3-7i)

Вариант 3

1.(5+4i)-(7-5i)
2.(3+2i)(8-2i)-(2+4i)
3.(10+6i)-(8-3i)(3+2i)
4.(10+8i)-(4-3i)^2
5.(3-i)/(5-i)- (7-i)
6.((6-2i)(8+i))/(9-i)

Вариант 4

1.(7+4i)-(7-5i)
2.(8+2i)(8-2i)-(8+4i)
3.(10+6i)-(8-3i)(3+2i)

4.(10+7i)-(9-3i)^2
5.(5-i)/(5-i)- (9-i)
6.((6-7i)(8+i))/(6-i)

Вариант 5

1.(8+4i)-(7-9i)
2.(5+2i)(8-2i)-(9+4i)
3.(12+6i)-(9-3i)(6+2i)
4.(1+7i)-(4-3i)^2
5.(8-i)/(5-i)- (13-i)
6.((4-7i)(8+i))/(5-i)

Вариант 6

1.(9+4i)-(9-9i)
2.(13+2i)(8-2i)-(6+4i)
3.(4+6i)-(9-3i)(9+2i)
4.(1+7i)-(4-3i)^2
5.(5-i)/(5-i)- (10-i)
6.((3-7i)(8+i))/(8-i)

Практическая работа №9.
Дифференцирование функций численными методами.

Цели: формировать умения находить частные производные функции первого и второго порядка.

Методические указания

При вычислении производных высоких порядков производная (n)-го порядка считается первой производной от (n-1)-го порядка. Так вторая производная функции является первой производной от первой производной:

$f''(x) = (f'(x))'$ или $\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$

Тогда выражение для вычисления производной примет вид:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{f'_1 - f'_{-1}}{2\Delta x} = \frac{\frac{f'_2 - f'_0}{2\Delta x} - \frac{f'_0 - f'_{-2}}{2\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{f'_2 - 2f'_0 + f'_{-2}}{2\Delta x}$$

Вариант 1

1. Найти производную функции

а) $y = (3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + 2)^5$ б) $y = \cos^2 x \bullet \lg(3x - 4)$

в) $y = \arccos 2x + \sqrt{1 - x^2}$ г) $y = \frac{3x - 5}{\sin^2 x}$

2.Найти частные производные функции первого и второго порядка:

а) $z = (3x^4 + 5x)y\sqrt{y} + 6\cos x \cdot \ln y$); б) $z = (2x^3 + 4)y^5 - arctgy \cdot e^{2x-5}$;

Вариант 2

1. Найти производную функции

а) $y=(3^{ctgx}+\sin 7x)^2$ б) $y=arcctg3x\bullet\sqrt[3]{2x-4}$

в) $y=(\frac{2-5x}{2+5x})^4$ г) $y=(2^{x^3}-\cos^2 x+2)\bullet tgx$.

2.Найти частные производные функции первого и второго порядка:

а) $z=\cos(3x-5)y\sqrt{y}-(2x-5)^3\cdot e^{3y}$; б) $z=e^{2x-3}\cdot y^3+(x^5+4x)\cdot\cos(3y-5)$.

Вариант 3

1. Найти производную функции

а) $y=(5x^2+5\sqrt[5]{x}+4)^9$ б) $y=\frac{4^{3x}+7}{arctgx}$

в) $y=\arcsin\sqrt{3-2x}$ г) $y=(\ln^2 5x+1)\bullet tgx^3$

2.Найти частные производные функции первого и второго порядка:

а) $z=\left(3x^4+5x\right)y\sqrt{y}+6\cos x\cdot\ln y$); б) $z=\frac{(2x+5)y^4}{\sin 2x}$.

Вариант 4

1. Найти производную функции

а) $y=\frac{\log_3^2 2x}{5^{3x}}$ б) $y=(4x^5+5^{4x}+\sqrt[4]{x^3})^4$

в) $y=tg(\cos(2x-5))$ г) $y=(3\arccos 2x+x)\bullet\lg 4x$

2.Найти частные производные функции первого и второго порядка:

а) $z=\left(3x^4+5x\right)y\sqrt{y}+6\cos x\cdot\ln y$); б) $z=(2x^3+4)y^5-arctgy\cdot e^{2x-5}$;

Вариант 5

1. Найти производную функции

а) $y=\frac{1}{(4x^6+8\bullet\sqrt[8]{x-1})^2}$ б) $y=\ln\frac{4x-1}{5x+2}$

в) $y=e^{3x}-2xtg3x$ г) $y=x\arccos\sqrt{x+1}$

2.Найти частные производные функции первого и второго порядка:

а) $z=\left(3x^4+5x\right)y\sqrt{y}+6\cos x\cdot\ln y$); б) $z=\frac{(2x+5)y^4}{\sin 2x}$.

Вариант 6

1. Найти производную функции

а) $y=3^{\cos 6x}-x\sin 2x$ б) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{\arccos 4x}$

в) $y=\left(\frac{1}{5}x^5-3x\ \sqrt[3]{x^2}+x-2\right)^3$ г) $y=ctg^3 2x\bullet\log_3 5x$

2.Найти частные производные функции первого и второго порядка:

а) $z=\left(3x^4+5x\right)y\sqrt{y}+6\cos x\cdot\ln y$); б) $z=\frac{(2x+5)y^4}{\sin 2x}$.

Практическая работа №10.

Вычисление определенного интеграла по правилам прямоугольников, трапеции.

Цели: формировать умения вычислять приближенно интегралы, используя формулы прямоугольников и трапеций.

Методические указания

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_1^2 \sqrt{x}dx$, если шаг h=0,2. Оценить погрешность.

Решение: Здесь $y=\sqrt{x}$, шаг h = $0,2$. Точками деления отрезка $[1;2]$ служат числа

$x_0=1, x_1=1,2, x_2=1,4, x_3=1,6, x_4=1,8$.

Найдем соответствующие значения подынтегральной функции:

$y_0=\sqrt{x_0}=\sqrt{1}=1,\ y_1=\sqrt{x_1}=\sqrt{1,2}=1,095,\ y_2=\sqrt{x_2}=\sqrt{1,4}=1,183,$

$y_3=\sqrt{x_3}=\sqrt{1,6}=1,265,\ y_4=\sqrt{x_4}=\sqrt{1,8}=1,342.$

Используя формулу прямоугольников, получим

$\int_1^2 \sqrt{x}dx$ = 0,2(1 + 1,095 + 1,183 + 1,265 + 1,342) ± R_n = 0,2·5,885 ± R_n ≈ 1,177 ± R_n .

Оценим погрешность. Производная функции $y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ достигает на отрезке $[1,2]$ наибольшего значения в точке $x=1, y'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=0,5$. Таким образом, $|f'(x)|=\frac{1}{2}$. Применим формулу $R_n \le \frac{h}{2}(b-a)\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|=\frac{0,2}{2}\cdot 1\cdot 0,5=0,05$

Следовательно, $\int_1^2 \sqrt{x}dx=1,177\pm 0,05.$

Пример 2. Вычислить по формуле трапеций $\int_1^2 \sqrt{x}dx$, если шаг h=0,2. Оценить погрешность.

Решение: Здесь $y=\sqrt{x}$, шаг h = $0,2$. Точками деления служат

$x_0=1, x_1=1,2, x_2=1,4, x_3=1,6, x_4=1,8\ x_5=2$.

Найдем соответствующие значения подынтегральной функции:

$y_0=\sqrt{x_0}=\sqrt{1}=1,\ y_1=\sqrt{x_1}=\sqrt{1,2}=1,095,\ y_2=\sqrt{x_2}=\sqrt{1,4}=1,183,$

$y_3=\sqrt{x_3}=\sqrt{1,6}=1,265,\ y_4=\sqrt{x_4}=\sqrt{1,8}=1,342,\ y_5=\sqrt{x_5}=\sqrt{2}=1,414$

Используя формулу трапеций, получим

$\int_1^2 \sqrt{x}dx$ = 0,2($\frac{1+1,414}{2}$ + 1,095 + 1,183 + 1,265 + 1,342) ± R_n = 0,2·6,092± R_n ≈ 1,2184± R_n.

Оценим погрешность. Производная функции $y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, вторая производная $|y''|=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ достигает на отрезке $[1,2]$ наибольшего значения в точке $x=1, y''(1)=\frac{1}{4\sqrt{1}}=0,25$.

Применим формулу $R_n \le \frac{h}{2}(b-a)\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|=\frac{0,2}{2}\cdot 1\cdot 0,25=0,025$

Ответ: $\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx 1,2184\pm\ 0,025.$

Вариант 1

1.Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3}\frac{2dx}{x}$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

2.Вычислить определенный интеграл $\int_{5}^{6}5\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

Вариант 2

1.Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3}\frac{2dx}{x}$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

2.Вычислить определенный интеграл $\int_{6}^{7}5\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

Вариант 3

1.Вычислить определенный интеграл $\int_{3}^{4}3\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

2.Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3}\frac{4dx}{x}$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

Вариант 4

1.Вычислить определенный интеграл $\int_{5}^{6}5\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

2.Вычислить определенный интеграл $\int_3^4 \frac{3dx}{x^2}$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

Вариант 5

1.Вычислить определенный интеграл $\int_4^5 3\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы Симпсона (n = 8).

2.Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 8\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

Вариант 6

1.Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 \frac{4dx}{x}$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

2.Вычислить определенный интеграл $\int_6^7 6\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы прямоугольников (n = 5);
формулы трапеций (n = 10).

Практическая работа №11.
Вычисление определенного интеграла по правилу Симпсона.

Цели: формировать умения вычислять приближенно интегралы, используя формулы Симпсона.

Методические указания

Пример: Вычислить по формуле Симпсона $\int_1^2 \sqrt{x}dx$, если шаг h=0,2. Оценить погрешность.

Решение: Здесь $y = \sqrt{x}$, при n = 8, имеем h = 0,125. Точками деления служат $x_0 = 1, x_1 = 1{,}125, x_2 = 1{,}25, x_3 = 1{,}375, x_4 = 1{,}5,\ x_5 = 1{,}625, x_6 = 1{,}75, x_7 = 1{,}875, x_8 = 2$.

Найдем соответствующие значения подынтегральной функции:

$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1,\ \ y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{1{,}125} = 1{,}06066,\ y_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{1{,}25} = 1{,}11803,$

$y_3 = \sqrt{x_3} = \sqrt{1{,}375} = 1{,}17260,\ y_4 = \sqrt{x_4} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}22474,\ y_5 = \sqrt{x_5} = \sqrt{1{,}625} = 1{,}27475$

$y_6 = \sqrt{x_6} = \sqrt{1{,}75} = 1{,}32288\ y_7 = \sqrt{x_7} = \sqrt{1{,}875} = 1{,}36931\ y_8 = \sqrt{x_8} = \sqrt{2} = 1{,}414.$

Используя формулу Симпсона, получим

$$I_1 = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[\ (y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\ \right] + R_n =$$

$$= \frac{0{,}125}{3}\left[(1 + 1{,}41421) + 4(1{,}06066 + 1{,}17260 + 1{,}27475 + 1{,}36931) + 2(1{,}11803 + 1{,}22474 + \right.$$

$$\left. + 1{,}32288)\right] + R_n = 0{,}04166\left[2{,}41421 + 19{,}50928 + 7{,}3313\right] = 1{,}2187545\,.$$

Оценим погрешность по формуле $\delta \approx \frac{I_1 - I_2}{15}$. I_1 =1,2187545. Вычислим I_2 для шага h = 0,25.

$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1,$ $y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{1{,}25} = 1{,}11803,$ $y_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}22474,$

$y_3 = \sqrt{x_3} = \sqrt{1{,}75} = 1{,}32288,$ $y_4 = \sqrt{x_4} = \sqrt{2} = 1{,}414.$

$$I_2 = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[\ (y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2\ \right] + R_n =$$

$$\frac{0{,}25}{3}\left[1 + 1{,}41421 + 4(1{,}11803 + 1{,}32288) + 2\cdot 1{,}22474\right] + R_n = 0{,}08333\cdot\left[2{,}41421 + 9{,}78732 + 2{,}44948\right] +$$

$$+ R_n = 1{,}22087 + R_n$$

$$\delta \approx \frac{I_1 - I_2}{15} = \frac{1{,}22087 - 1{,}2187545}{15} = 0{,}00014$$

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx 1{,}218754 \pm\ 0{,}00014.$$

Вариант1

1Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 \frac{2dx}{x}$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

2Вычислить определенный интеграл $\int_4^5 3\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

Вариант2

1Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 \frac{4dx}{x}$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

2Вычислить определенный интеграл $\int_3^4 \frac{3dx}{x^2}$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

Вариант3

1Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3} 8\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

2Вычислить определенный интеграл $\int_{4}^{5} \frac{8dx}{x}$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

Вариант4

1Вычислить определенный интеграл $\int_{6}^{7} 6\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

2Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3} \frac{2dx}{x}$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

Вариант5

1Вычислить определенный интеграл $\int_{6}^{7} 5\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

2Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3} \frac{2dx}{x}$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

Вариант6

1Вычислить определенный интеграл $\int_{4}^{5} 3\sqrt{x}dx$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

2Вычислить определенный интеграл $\int_{2}^{3} \frac{4dx}{x}$ с помощью:

формулы Симпсона (n = 8).

Практическая работа №12.

Действия над матрицами. Вычисление определителей.

Цели: формировать умения выполнять действия с матрицами, вычислять определителей матрицы.

Методические указания

Пример 1. Вычислить: A+B

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 12 & 6 & -7 \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 11 & 9 \\ 32 & -14 & 5 \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-7 & -5+11 & 4+9 \\ 12+32 & 6-14 & -7+5 \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 13 \\ 44 & -8 & -2 \\ & & \end{pmatrix}$$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot(-4) + 2\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot(-4) - 1\cdot 1\cdot(-1) = 10 - 12 -$$

4-30+1+16= -19

Определитель вычисляется по правилу треугольника

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Произведения вычисляются

По главной диагонали (+)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

По побочной диагонали(-)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вариант 1

1) Вычислить: A+B;

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 & -5 \\ 3 & 4 & -8 & 3 \\ 14 & -12 & 6 & -15 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 10 & 12 \\ -6 & 9 & -7 & 3 \\ -5 & -4 & 11 & -18 \end{pmatrix};$$

2) Вычислить: 4*A-2*B;

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 12 \\ 8 & -6 & -5 & 4 \\ 8 & 7 & -3 & -7 \\ 8 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 9 & 4 & -6 & 4 \\ -6 & 8 & -8 & 4 \\ 14 & -10 & -1 & 5 \\ 6 & -9 & -5 & -6 \\ -5 & 8 & -3 & -16 \end{pmatrix}$$

3) Вычислить: A^3;

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -6 & 5 & 1 \\ -6 & 9 & 4 \end{pmatrix};$$

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Вариант 2

1) Вычислить: A+B;

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 & -5 \\ 3 & 5 & -8 & 7 \\ 14 & -12 & 6 & -6 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 & 12 \\ -6 & 3 & -7 & 3 \\ -8 & -4 & 4 & -18 \end{pmatrix};$$

2) Вычислить: 3*A-4*B;

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 12 \\ 3 & -6 & -5 & 4 \\ 9 & 4 & -7 & -7 \\ 8 & 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 4 \\ -6 & 7 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \\ 2 & -9 & -5 & -6 \\ -1 & 5 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

3) Вычислить: A^3;

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -5 & 5 & 1 \\ -6 & 9 & 4 \end{pmatrix};$$

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 & 8 \\ 5 & -3 & 6 \\ 4 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

Вариант 3

1) Вычислить: A+B;

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 18 & -6 & -5 \\ 2 & 3 & -8 & 3 \\ 7 & -10 & 6 & -19 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 10 & 12 \\ -6 & 8 & -7 & 3 \\ -7 & -2 & 15 & -18 \end{pmatrix};$$

2) Вычислить: 3*A+2*B;

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 12 \\ 7 & -6 & -5 & 4 \\ 8 & 7 & -3 & -7 \\ 8 & 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 & 4 \\ -6 & 8 & -8 & 4 \\ 14 & -10 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & -5 & -6 \\ -2 & 8 & -3 & -17 \end{pmatrix}$$

3) Вычислить: A^3;

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix};$$

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 7 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

Вариант 4

1) Вычислить: A+B;

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 18 & -6 & -5 \\ 2 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & -10 & 5 & -12 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 & 6 \\ -6 & 2 & -5 & 3 \\ -7 & -2 & 12 & -13 \end{pmatrix};$$

2) Вычислить: 4*A-3*B;

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 9 \\ 5 & 2 & -4 & 12 \\ 7 & -6 & -5 & 4 \\ 8 & 5 & -8 & -2 \\ 5 & 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 & 7 \\ -6 & 5 & -4 & 6 \\ 12 & -11 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

3) Вычислить: A^3;

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \\ -8 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & -9 & 3 \\ 3 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Вариант 5

1) Вычислить: A-B;

A= $\begin{pmatrix} 5 & 15 & -6 & -5 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -9 & 3 & -12 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & 6 \\ -8 & 2 & -3 & 3 \\ -5 & -2 & 12 & -13 \end{pmatrix}$;

2) Вычислить: 2*A-2*B;

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -8 & 9 \\ 10 & 2 & -4 & 12 \\ 3 & -5 & -5 & 4 \\ 5 & 2 & -8 & -2 \\ 3 & 8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 7 \\ -6 & 5 & -4 & 6 \\ 12 & -19 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & -3 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -11 \end{pmatrix}$

3) Вычислить: A^3;

A= $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 8 & 2 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Вариант 6

1) Вычислить: A+B;

A= $\begin{pmatrix} 2 & 15 & -6 & -5 \\ 13 & 8 & -4 & 3 \\ 2 & -9 & 1 & -10 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 6 \\ -8 & 2 & -3 & 3 \\ -5 & -2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$;

2) Вычислить: 5*A+*B;

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -8 & 9 \\ 10 & 2 & -4 & 12 \\ 5 & -5 & -5 & 4 \\ 5 & 3 & -8 & -2 \\ 3 & 7 & 3 & -5 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -6 & 7 \\ -6 & 5 & -4 & 6 \\ 19 & -10 & -1 & 5 \\ 5 & -5 & -3 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -11 \end{pmatrix}$

3) Вычислить: A^3;

A= $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 8 & 2 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -9 & 1 \\ 5 & 7 & -8 \end{vmatrix}$$

Практическая работа №13.
Решение систем линейных уравнений матричным методом.

Цели: формировать умения решать системы линейных уравнений матричным методом.

Методические указания

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x+y-z=-3 \\ x-5y-z=-8 \end{cases}$$

Решение: Запишем систему уравнений в матричном виде AX = B, где

Матрица коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

Решим с помощью обратной матрицы

Определитель матрицы А

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1-5) + 2(-2+1) + (-10-1) = -6-2-11 = -19$$

Транспонируем матрицу А

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдем алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-5 = -6$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1$, $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10-1 = -11$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2+5) = -7$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5$

Составим матрицу из алгебраических дополнений $\overline{A} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Составим матрицу, обратную матрице А по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \overline{A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы уравнений по формуле $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot (-1) - 7 \cdot (-3) + 1 \cdot (-8) \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-8) \\ -11 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) + 5 \cdot (-8) \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 \\ -19 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка: $\begin{cases} -1 - 2 \cdot 1 + 2 = -1 \\ 2 \cdot (-1) + 1 - 2 = -3 \\ -1 - 5 \cdot 1 - 2 = -8 \end{cases}$, верно.

Ответ: (- 1; 1; 2)

Вариант 1

Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=7 \\ 4x-2y+z=1 \\ x-3y+4z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 3x-y+5z=7 \\ x-y+4z=4 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+3z=9 \\ x-y+z=2 \\ 3x-5y+z=0 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ 5x-2y+z=-1 \\ x-3y+4z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=8 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-3y+z=6 \end{cases}$$

Практическая работа №14.
Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цели: формировать умения решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Методические указания

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x+y-z=-3 \\ x-5y-z=-8 \end{cases}$$

Решение: Решим с помощью формул Крамера.

Определитель матрицы А

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=(-1-5)+2(-2+1)+(-10-1)=-6-2-11=-19$$

Заменим 1 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -1 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}=-(-1-5)+2(3-8)+(15+8)=$$

$$=6-10+23=19$$

Заменим 2 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -8 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}=(3-8)+(-2+1)+(-16+3)=-5-1-13=-19$$

Заменим 3 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-2&-1\\2&1&-3\\1&-5&-8\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-3\\-5&-8\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&-3\\1&-8\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&-5\end{vmatrix}=(-8-15)+2(-16+3)-(-10-1)=-23-26+11=-38$$

Найдем неизвестные по формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x=\frac{19}{-19}=-1,\quad y=\frac{-19}{-19}=1,\quad z=\frac{-38}{-19}=2$$

Проверка выполняется, как и в 1 способе.

Вариант1

Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases}2x+3y-2z=7\\4x-2y+z=1\\x-3y+4z=-6\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+3y-2z=2\\3x-y+5z=7\\x-y+4z=4\end{cases}$$

Вариант2

Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases}x+4y-2z=7\\x-y+3z=2\\x+3y-4z=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+2y+3z=8\\x-y+2z=2\\3x-3y+z=6\end{cases}$$

Вариант3

Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases}x+4y-2z=7\\x-y+3z=2\\x+3y-4z=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+y-2z=0\\x-2y+z=-3\\3x-5y+4z=-6\end{cases}$$

Вариант4

Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases}2x+3y-2z=1\\5x-2y+z=-1\\x-3y+4z=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=8 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-3y+z=6 \end{cases}$$

Вариант5

Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=7 \\ 4x-2y+z=1 \\ x-3y+4z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 3x-y+5z=7 \\ x-y+4z=4 \end{cases}$$

Вариант6

Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=8 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-3y+z=6 \end{cases}$$

Практическая работа №15.

Решение систем линейных уравнений по формулам Гаусса.

Цели: формировать умения решать системы линейных уравнений по формулам Гаусса.

Методические указания

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x+y-z=-3 \\ x-5y-z=-8 \end{cases}$$

Решение: Решим методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу из коэффициентов и свободных членов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -1 & -8 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -19 & -38 \end{array}\right)$$

1. Умножим 1 строку на (-2) с сложим поэлементно со 2 строкой, результат запишем во 2 строку.

Умножим 1 строку на (-1) и сложим поэлементно с 3 строкой, результат запишем в 3 строку.

2. Умножим 2 строку на 3, а 3строку на 5, сложим и запишем в 3 строку.

Составим систему уравнений, используя полученную матрицу треугольного вида

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 5y-3z=-1, \\ -19z=-38 \end{cases} \begin{cases} x-2y+2=-1 \\ 5y-3\cdot 2=-1, \\ z=2 \end{cases} \begin{cases} x-2\cdot 1+2=-1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}.$$

Проверка выполняется, как и в 1 способе.

Ответ: (- 1; 1; 2)

Вариант1

Решить систему уравнений по формулам Гаусса

$$\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 3x-y+5z=7 \\ x-y+4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

Вариант2

Решить систему уравнений по формулам Гаусса

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ 5x-2y+z=-1 \\ x-3y+4z=1 \end{cases}$$

Вариант3

Решить систему уравнений по формулам Гаусса

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=8 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-3y+z=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

Вариант4

Решить систему уравнений по формулам Гаусса

$$\begin{cases} 2x+y+3z=9 \\ x-y+z=2 \\ 3x-5y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$$

Вариант5

Решить систему уравнений по формулам Гаусса

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

Вариант6

Решить систему уравнений по формулам Гаусса

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ 5x-2y+z=-1 \\ x-3y+4z=1 \end{cases}$$

Практическая работа №16.
Решение систем линейных уравнений различными способами.

Цели: формировать умения решать системы линейных уравнений по формулам Гаусса, матричным методом, методом Крамера.

Вариант1

Решить систему уравнений а)по формулам Гаусса; б)матричным методом; в)методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+3z=9 \\ x-y+z=2 \\ 3x-5y+z=0 \end{cases}$$

Вариант2

Решить систему уравнений а)по формулам Гаусса; б)матричным методом; в)методом Крамера.

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

Вариант3

Решить систему уравнений а)по формулам Гаусса; б)матричным методом; в)методом Крамера.

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

Вариант4

Решить систему уравнений а)по формулам Гаусса; б)матричным методом; в)методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ 5x-2y+z=-1 \\ x-3y+4z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=8 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-3y+z=6 \end{cases}$$

Вариант5

Решить систему уравнений а)по формулам Гаусса; б)матричным методом; в)методом Крамера.

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

Вариант6

Решить систему уравнений а)по формулам Гаусса; б)матричным методом; в)методом Крамера.

$$\begin{cases} x+4y-2z=7 \\ x-y+3z=2 \\ x+3y-4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+4z=-6 \end{cases}$$

Практическая работа №17.
Решение задач на вычисление вероятностей событий.

Цели: формировать умения решать задачи на вероятность.

Методические указания

Пример 1.Найти вероятность того, что случайным образом из колоды карт вынут карту дама.

Решение. В колоде 4 дамы, значит число событий, благоприятствующих появлению дамы m = 4. Всего в колоде 36 карт, следовательно, число равновозможных событий n = 36.

$$P = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Пример 2. В мастерских изготавливаются детали на двух станках. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.

Решение.

Пусть событие А – «деталь изготовлена на первом станке», В – « деталь годная». Имеем:

Р(А)=0,6, Р(В/А)=0,8. Находим из формулы $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$,

$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

Вариант 1

1. Из колоды в 36 карт вынимаются наугад 3 карты. Найти вероятность того, что вынуты дама, валет и одна девятка.
2. В кошельке лежат 3 монеты достоинством 20 копеек и 7 монет трёхкопеечных. Наудачу вынимаются две монеты. Какова вероятность того, что обе монеты будут одного достоинства?
3. В урне 30 шаров, из них 5 чёрных и остальные белые. Вынимаются один за другим 3 шара подряд. Какова вероятность того, что будет вынуто 2 чёрных и один белый шар?
4. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх проверенных изделий будет ровно 2 изделия высшего сорта.
5. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,4; для второго-0,5 и для третьего-0,7. Найти вероятность того, что в результате однократного выстрела всех стрелков по мишени в ней будет ровно одна пробоина.

Вариант 2

1. Из колоды в 36 карт вынимаются наугад 2 карты. Найти вероятность того, что вынуты туз и одна десятка.
2. В партии из 10 изделий 4 бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 6 изделий ровно два окажутся бракованные.
3. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трёх орудий соответственно равны: $\rho_1 = 0{,}8$; $\rho_2 = 0{,}7$; $\rho_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель при одном залпе из всех орудий.
4. В урне 30 шаров, из них 5 чёрных и остальные белые. Вынимаются один за другим 3 шара подряд. Какова вероятность того, что будет вынуто 2 белых и один чёрный шар?

5. Радиолампа может принадлежать к одной из 3 партий с вероятностями $\rho_1 = 0{,}25$; $\rho_2 = 0.5$; $\rho_3 = 0.25$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов равны для этих партий соответственно 0,1 - для первой, 0,2 - для второй, 0,4 - для третьей. Найти вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

Вариант 3

1. На каждой из десяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: Т, С, Н, М, И, К, О, Л, У, П. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на семи вынутых по одной и расположенных в “одну линию” карточках можно прочесть слово СПУТНИК.

2. Круговая мишень состоит из 3 зон. Вероятность попадания в первую зону – 0,12; во вторую – 0.23; в третью – 0.3. Найти вероятность промаха.

3. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 15. Чему равна вероятность того, что в первые два дня августа не будет ни одного дождливого дня?

4. Четыре стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,45; для второго – 0,5; для третьего – 0,6; для четвёртого – 0,7. Найти вероятность того, что в результате однократного выстрела всех четырёх стрелков по мишени будет хотя бы одна пробоина.

5. На двух автоматах изготавливаются одинаковые детали. Производительность первого автомата в 2 раза больше, чем второго. Вероятность изготовления детали высшего качества на первом автомате – 0,95, а на втором – 0,07. Детали с обоих автоматов поступают вместе на склад. Определить вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь окажется высшего качества.

Вариант 4

1. Абонент забыл 3 последние цифры номера телефона и потому набирает наугад. Какова вероятность того, что он верно наберёт нужный ему номер (забытые цифры различны)?

2. Изготовление детали состоит из двух технологических операций. При первой операции получается 2% брака, при второй – 6% брака. Определить вероятность того, что после этих двух операций деталь будет годной.

3. Из десяти билетов лотереи выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых пяти билетов хотя бы один выигрышный.

4. Два охотника одновременно стреляют в цель. Вероятность попадания у первого охотника – 0,2 у второго – 0,6. В результате одного залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

5. Стрельба производится по мишеням типа А, В, С, число которых соответственно относится, как 5: 3: 2. Вероятность попадания в мишень типа А равна 0,4; типа В – 0,1;типа С – 0,15. Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если неизвестно в мишень какого типа он будет сделан.

Вариант 5

1. В лотерее 1000 билетов, из них половина выигрышные. Куплено два. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные?

2. В студии телевидения 3 телекамеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент равна 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

3. Вероятность того, что стрелок при стрельбе по мишени выбьет 10 очков равна 0,15;9 очков – 0,2; 8 очков – 0,3; 7 очков – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок выбьет более 7 очков.

4. На десяти одинаковых карточках написаны буквы, составляющие слово “МАТЕМАТИКА”. Карточки тщательно перемешивают и вытаскивают 4,

раскладывая их в ряд одну за другой. Какова вероятность, что появится слово “МАМА”?

5. У сборщика имеется 3 коробки деталей, изготовленных заводом №1, 4 – изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна равна 0,7, а для завода №2 – 0,9. Наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что вынутая деталь стандартна.

Вариант 6

1. В ящике 6 белых и 8 чёрных шаров. Из ящика вынули 2 шара (выборка бесповторная). Найти вероятность того, что оба шара белые.

2. В мешочке имеется 7 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика одна из следующих букв: о, п, р, с, т, о, м. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных “ в одну линию ” кубиках можно будет прочесть слово: “спорт”; “ опрос”.

3. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, при стрельбе из второго орудия – 0,7. Найти вероятность поражения цели при одновременном выстреле обоих орудий.

4. На предприятии при массовом изготовлении некоторого изделия брак составляет в среднем 1,5% общего числа всех изделий. 96% числа годных изделий составляют изделия первосортные. Найти вероятность того, что наугад взятое изделия окажется первосортным.

5. Три стрелка независимо друг от друга производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель равны соответственно: 0,6; 0.7; 0.9. Определить вероятность двух промахов.

Практическая работа №18.
Решение задач на нахождение вероятностей событий с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.

Цели: формировать умения решать задачи на вероятность с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.

Методические указания

Пример. В коробке лежат 4 черных, 7 белых и 5 красных шаров. Из коробки случайным образом берут шары. Найти вероятность того, что возьмут:

1) 1 шар белого цвета,
2) 2 шара черного цвета,
3) 3 красных и 4 белых,
4) 5 шаров, среди которых могут оказаться шары красного или белого цвета.

Решение.

1) Событие А взять 1 шар белого цвета.

В коробке 7 белых шаров, значит m = 7 (число благоприятствующих событий для события А), Всего шаров 16, значит n = 16 (число равновозможных событий).

Вычислим по формуле вероятности **P =** $\frac{m}{n} = \frac{7}{16}$.

2)Событие В – взяли 2 шара черного цвета.

В коробке 4 черных шара, а взять надо из них 2, значит m = $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 12$

(число благоприятствующих событий для события В), Всего шаров 16, а взять надо из них 2, значит n = $\mathbf{A}_{16}^2 = \frac{16!}{(16-2)!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14!}{14!} = 240$ (число равновозможных событий).

Вычислим по формуле вероятности **P =** $\frac{m}{n} = \frac{12}{240} = \frac{1}{20}$.

3) Событие С – взять 3 красных и 4 белых шаров.
Вычислим число событий, благоприятствующих событию С:

$$m = A_5^3 \cdot A_7^4 = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 60 \cdot 840 = 50400$$

Вычислим число равновозможных событий:

$$n = A_{16}^7 = \frac{16!}{(16-7)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 57657660$$

Вычислим по формуле вероятности **P =** $\frac{m}{n} = \frac{50400}{57657660} = \frac{2520}{2882883} = \frac{840}{960961}$.

4) Событие D - взять 5 шаров, среди которых могут оказаться шары красного или белого цвета.
В коробке 12 шаров нужной окраски, необходимо взять из них 5.

$$m = A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 95040$$

$$n = A_{16}^5 = \frac{16!}{(16-5)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{11!} = 524160$$

Вычислим по формуле вероятность **P(D) =** $\frac{m}{n} = \frac{95040}{524160} = \frac{297}{1638} = \frac{33}{182}$.

Вариант 1

1.Из букета, в котором находятся 7 красных, 8 белых и 3 жёлтых розы, вынимают одну. Найти вероятность того, что роза окажется жёлтой.

2. Два стрелка одновременно стреляют в цель. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Нужно найти вероятность того, что а) оба стрелка попадут в цель; б) оба стрелка промажут; в) попадет только один стрелок.

3. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 25 000 руб., на 10 - по 10 000 руб, на 20 - по 5 000 руб., на 25 - по 500 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 1 000 руб.

4. В пакете лежат 10 конфет «Мишка косолапый», 12 конфет «Вдохновение» и 8 батончиков «Сникерс». Лиза наугад достает одну конфету. Найти вероятность того, что это будет а) «Мишка косолапый» или «Вдохновение»; б) «Мишка косолапый» или «Сникерс».

Вариант 2

1. Из корзины, в которой находятся 5 бананов, 8 апельсинов и 3 яблока, вынимают один фрукт. Найти вероятность того, что это будет апельсин.

2. Два ученика решают задачу по математике. Вероятность того, что первый решит ее, равна 0,7, второй ученик решит ее с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что а) оба

ученика решат задачу; б) оба ученика не решат задачу; в) задачу решит только один ученик.

3. В пенале находятся четыре ручки со стержнями разного цвета: 5 штук с красным, 3 штуки с синим, 2 штуки зеленым и 2 с черным. Найти вероятность того, что это будет а) красный или синий стержень; б) зеленый или черный стержень.

4. Имеется 1 000 лотерейных билетов. Известно, что на 20 билетов попадает выигрыш по 20 000 руб., на 40 - по 10 000 руб, на 50 - по 5 000 руб., на 100 - по 2 000 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 5 000 руб.

Практическая работа №19.
Нахождение числовых характеристик случайных величин.

Вариант 1

Цели: сформировать понятие о дискретной случайной величине, законе распределения дискретной случайной величины.

Методические указания

Пример. Составить закон распределения числа выпадений монет гербом вверх, при подкидывании 2 монет.

Решение.

Перечислим возможные исходы опыта: ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ. Получили значения искомой величины: 0,1,2. Найдем вероятности выпадения каждой из них и составим таблицу – закон распределения дискретной случайной величины.

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

Проверим $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$.

Определение. ***Математическое ожидание*** M(X) и ***дисперсия*** D(X) дискретной случайной величины X вычисляются по формулам **M(X) =** $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ **,**

D(X) = M(X²) - M ²(X).

Пример. Пусть задан закон распределения дискретной случайной величины

X	2	3	-4	1
P	0,2	0.1	0,19	0,51

Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

Решение. Найдем $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 =$ 0,2 + 0,1 + 0,19 + 0,51=1

Вычислим M(X) = $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$

M(X) = 2 · 0,2 + 3 · 0,1 + (-4) · 0,19 + 1 · 0,51 =
= 0,4 + 0,3 – 0,76 + 0,51 =0,45.

Вычислим D(X) = M(X) - M²(X),

$M^2(X)$ = (M(X))² = (0,45)² = 0,2025,

$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4$ = 2² · 0,2 + 3 ²· 0,1 + (-4)² · 0,19 + 1² · 0,51 =
= 0,8 + 0,9 + 3,04 + 0,51 = 5,26 ,

D(X) = 5,26- 0,2025 = 5,0575.
Ответ: M(X) = 0,45, D(X) = 5,0575.

Вариант 1

Дан закон распределения дискретной случайной величины

X	-2	-1	0	1	3	4	6
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{8}$

Найти 1)математическое ожидание дискретной случайной величины 2) дисперсию 3) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 2

Дан закон распределения дискретной случайной величины

X	-6	-4	-2	0	3	4	5
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины 2) дисперсию 3) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 3

Дан закон распределения дискретной случайной величины

X	-4	-2	0	2	4	6	7
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины 2) дисперсию 3) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 4

Дан закон распределения дискретной случайной величины

X	-5	-3	-2	0	1	5	15
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}$

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины 2) дисперсию 3) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 5

Дан закон распределения дискретной случайной величины

X	-9	-3	3	5	9	12	15
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{2}{9}$

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины 2) дисперсию 3) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 6

Дан закон распределения дискретной случайной величины

X	-3	-2	0	1	2	4	5
P	0,21	0,05	0,04	0,16	0,35	0,2	0

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины 2) дисперсию 3) среднее квадратичное отклонение.

Практическая работа № 20.
Числовые характеристики выборки. Геометрическая интерпретация выборки.

Цели: сформировать умение составлять статистическое распределение выборки, вычислять числовые характеристики выборки, чертить полигон частот и относительных частот.

Методические указания

Выборочным средним $\bar{x}_в$ выборки объема n со статистическим распределением

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

называется среднее арифметическое значений признака выборки, т.е.

$$\boxed{\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}$$

Аналогично для генеральной совокупности объема N со статистическим распределением

x_i	x_1	x_2	...	x_k
N_i	N_i	N_2	...	N_k

определяется генеральное среднее:

$$\boxed{\bar{x}_Г = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots x_k N_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i}.$$

Выборочной дисперсией D_b некоторой выборки называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака от выборочной средней $\bar{x}_в$.

Если варианты $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ выборки объема n имеют частоты $n_1, n_2, \ldots n_k$, то

$$D_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_b)^2 .$$

Аналогично для генеральной совокупности определяют генеральную дисперсию $D_Г$. Если дана генеральная совокупность объема N со статистическим распределением , заданным таблицей 5, то

$$\boxed{D_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \bar{x}_Г)^2}., \text{ или } \boxed{D = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$$

Дисперсия является характеристикой рассеяния значений признака вокруг своего среднего значения.

Часто рассматривается еще величина, которая называется средним квадратическим отклонением выборки.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_b)^2}{n}} = \sqrt{D_в}},$$

Вариант 1

1. При подбрасывании игральной кости выпадали следующие очки:

6,3,3,2,5,1,1,2,1,4,6,5,4,4,6,3,2,6,4,5. Составить таблицу статистического распределения данной выборки. Вычислить относительные частоты для каждого варианта.

2.Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки, выбрав оптимальный масштаб

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

Вариант 2

1. При подбрасывании игральной кости выпадали следующие очки: 4,4,3,2,5,1,1,2,1,4,6,5,4,4,6,3,2,6,4,5. Составить таблицу статистического распределения данной выборки. Вычислить относительные частоты для каждого варианта.

2.Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки, выбрав оптимальный масштаб

x_i	7	3	5	1
n_i	10	20	5	20

Вариант 3

1. При подбрасывании игральной кости выпадали следующие очки: 6,1,3,2,5,1,1,2,1,4,6,5,4,4,6,3,2,6,4,4. Составить таблицу статистического распределения данной выборки. Вычислить относительные частоты для каждого варианта.

2.Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки, выбрав оптимальный масштаб

x_i	2	8	5	6
n_i	15	15	5	20

Вариант 4

1. При подбрасывании игральной кости выпадали следующие очки: 2,3,3,2,5,1,1,2,1,4,6,5,4,4,6,3,2,3,4,5. Составить таблицу статистического распределения данной выборки. Вычислить относительные частоты для каждого варианта.

2.Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки, выбрав оптимальный масштаб

x_i	13	8	5	2
n_i	10	15	5	20

Вариант 5

1. При подбрасывании игральной кости выпадали следующие очки: 6,3,4,2,5,1,1,2,1,4,6,5,4,1,6,3,2,6,4,5. Составить таблицу статистического распределения данной выборки. Вычислить относительные частоты для каждого варианта.

2.Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки, выбрав оптимальный масштаб

x_i	14	3	5	6
n_i	20	15	5	20

Вариант 6

1. При подбрасывании игральной кости выпадали следующие очки: 1,4,3,2,5,1,1,2,1,4,6,5,4,4,6,3,2,6,4,5. Составить таблицу статистического распределения данной выборки. Вычислить относительные частоты для каждого варианта.

2.Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки, выбрав оптимальный масштаб

x_i	7	3	5	1
n_i	10	20	15	20

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

ОИ 1.Богомолов, Н. В. Математика: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко.-5-е изд., перераб.и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2016. – 396 с.
ОИ 2.Дадаян, А. А. Математика [Электронный ресурс]: учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2019. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - Текст : электронный. - URL: http://znanium.com/catalog/product/1006658 (ЭБС Znanium)

ОИ 3.Мордкович, А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст]: В 2 ч. Ч. 1. Учебник / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.- 3-е изд., стер. - Москва: Мнемозина, 2016.-311 с.
ОИ 4.Мордкович, А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [Текст]: В 2 ч. Ч. 1.Учебник / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.- 3-е изд., стер. - Москва: Мнемозина, 2015.-463 с.

Дополнительные источники:

ДИ 1.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. В2 ч. [Текст]: учебное пособие для СПО / Н.В. Богомолов.- 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2016
ДИ 2.Сборник задач по математике[Электронный ресурс]: учебное пособие/Дадаян А. А., 3-е изд. - Москва : Форум, ИНФРА-М Издательский Дом, 2018. - 352 с.: - (Профессиональное образование) - Текст: электронный. - URL: http://znanium.com/catalog/product/970454

ДИ 3.Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [Текст]: В 2 ч. Ч. 2. Задачник / А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А.Г. Мордковича.- 4-е изд., стер.- Москва: Мнемозина, 2016.-264 с.
ДИ 4.Мордкович, А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [Текст]: В 2 ч. Ч. 2. Задачник / А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А.Г. Мордковича- 4-е изд., стер.-Москва: Мнемозина, 2015.-343 с.

Интернет источники:

И-Р1. http://www.rusedu.ru/subcat_is/htm/

И-Р2. http://www.alleng.ru/edu/math3.htm

И-Р3. http://www.softtok.org/science/math/